1998 Maritime Mathematics Competition
Solutions

1. Consider all possible numbers between 100 and 1000 which are formed by using only the digits 0,1,2,3,5 (with no digit repeated). How many of these are divisible by 6?

   Parmi les nombres de 100 *à* 1000 *dont les chiffres sont choisis sans répétition parmi* $\{0, 1, 2, 3, 5\}$*, combien sont divisibles par* 6*?*

   Solution: If the number is divisible by 6 then it must be divisible by 2 and hence ends with 0 or 2. The number must also be divisible by three and hence the sum of its digits must be a multiple of 3. If the number ends in 0, then its first two digits are either 1 and 2 or 1 and 5. This gives four possibilities: 120, 210, 150 and 510. If the number ends in a two then the first two digits must be 1 and 0 or 1 and 3. This gives three possibilities: 102, 132, 312. (The number cannot start with a 0.) Hence there are seven such numbers.

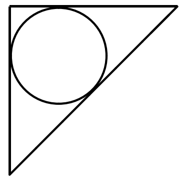
   Les nombres en question, étant divisibles par 6, sont pairs et donc se terminent par 0 ou 2. Puisque ces nombres sont également divisibles par 3, la somme de leurs chiffres est divisible par 3. Une vérification de toutes les possibilités montre maintenant que les nombres en question dont le chiffre des unités est 0 sont 120, 210, 150 et 510 et ceux dont le chiffre des unités est 2 sont 102, 132, 312. Ainsi, sept parmi les nombres de la forme donnée sont divisibles par 6.

2. A circle of radius 5 is circumscribed by a right-angled isoceles triangle. What is the length of the hypotenuse of the triangle?

   Un cercle de rayon 5 est inscrit dans un triangle rectangle isocèle. Quelle est la longueur de l'hypoténuse du triangle?

   Solution: There are many possible ways of arriving at the correct solution of $\ell = 10(1 + \sqrt{2})$. One of the simplest is to consider the height h of the triangle. Since it is an isoceles triangle this is half of the hypotenuse ($h = \ell/2$), but, as the diagram shows, this is also the sum of the radius of the circle (5) and the length of the diagonal of a five by five square ($5\sqrt{2}$). Hence $\ell = 2h = 2(5 + 5\sqrt{2}) = 10 + 10\sqrt{2}$.

   La longueur de l'hypoténuse est $\ell = 10(1 + \sqrt{2})$*, comme on peut le vérifier de plusieurs façons. Une possibilité est de constater que la hauteur* h *du triangle est la moitié de l'hypoténuse,* $h = \ell/2$*, puisque le triangle est rectangle. De plus, comme le montre la figure,* h *est aussi la somme du rayon du cercle et de la diagonale d'un carré de 5 unités de côté,* $h = 5 + 5\sqrt{2}$*. D'où* $\ell = 2h = 2(5 + 5\sqrt{2}) = 10 + 10\sqrt{2}$*.*



3. Two trains are travelling on parallel tracks. One train is x times as fast as the other train. It takes x times as long for the two trains to pass when going in the same direction as it takes the two trains to pass when going in opposite directions. Find x.

   Deux trains circulent sur des voies parallèles. L'un des trains est x fois plus vite que l'autre. Le temps requis pour que le train le plus vite dépasse le plus lent lorsque les trains voyagent dans le même sens est x fois plus grand que le temps requis pour que les deux trains se croisent en voyageant en sens inverse. Quelle est la valeur de x?

   Solution: Let v_1 be the speed of train one and v_2 be the speed of train two. Let $t_s$be the time to pass when both trains are going in the same direction and t_o be the time to pass when the trains are going in opposite directions. If train one is x times as fast as train two then $v_1 = xv_2$. When travelling the same direction the relative speeds of the two trains are $v_1 - v_2 = (x-1)v_2$, while when travelling in opposite directions the relative speed is $v_1+v_2 = (x+1)v_2$. Now speed is distance travelled divided by time so time is distance travelled divided by speed. The relative distance travelled d is the same in either direction so

$$t_s = \frac{d}{(x-1)v_2} = xt_o = x\frac{d}{(x+1)v_2}.$$

   Hence $(x+1) = x^2 - x$. Solving for x using quadratic formula (and taking positive solution) we obtain

$$x = 1 + \sqrt{2}.$$

   (Note: To visualize relative speed and relative distance travelled choose a reference frame where one train is stationary.)

   Soient v_1 la vitesse du premier train et v_2 la vitesse du deuxième. Soient t_s le temps requis pour que le train le plus vite dépasse le plus lent lorsque les trains voyagent dans le même sens et t_o le temps requis pour que les deux trains se croisent en voyageant en sens inverse. Si le premier train est x fois plus vite que le deuxième, alors $v_1 = xv_2$. La vitesse relative du premier train par rapport au deuxième est $v_1 - v_2 = (x-1)v_2$ lorsque les trains voyagent dans le même sens et $v_1 + v_2 = (x+1)v_2$ lorsqu'ils voyageant en sens inverse. La distance relative d parcourue par le premier train par rapport au deuxième est le même dans les deux sens. On a donc

$$t_s = \frac{d}{(x-1)v_2} = xt_o = x\frac{d}{(x+1)v_2}.$$

ce qui donne $(x+1) = x^2 - x$. *La racine positive de cette équation donne la solution,* $x = 1 + \sqrt{2}$.

4. Show that
$$\frac{(3\sqrt{3}+5)^{1/3} + (3\sqrt{3}-5)^{1/3}}{2^{2/3}\sqrt{3}} = 1.$$
Montrer que
$$\frac{(3\sqrt{3}+5)^{1/3} + (3\sqrt{3}-5)^{1/3}}{2^{2/3}\sqrt{3}} = 1.$$

Solution: Let x be the number on the left hand side of the above equation. Computing x^3 and simplifying we obtain that
$$x^3 = \frac{1+x}{2}.$$
since $2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1) = (x-1)(2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$,the only real solution of this equation is 1 and since x is evidently real, we must have $x = 1$.

Soit x *le membre de gauche de l'équation ci-dessus. Si on calcule* x^3 *on trouve, après simplification,*
$$x^3 = \frac{1+x}{2}.$$
On a donc $0 = 2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1) = (x-1)(2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$, *et la seule solution réelle de cette dernière équation est* $x = 1$.

5. The numbers
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$$
are written on a blackboard. Two numbers a and b are selected arbitrarily from the list, deleted, and replaced by the single number $a+b+ab$. This is done repeatedly until one number is left. What are the possible values of this number?

On écrit au tableau les nombres
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}.$$
On efface deux parmi ces nombres, a *et* b*, choisis au hasard, et on les remplace par le nombre* $a+b+ab$*. Si ce processus est répété jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre au tableau, quelles sont les valeurs possibles de ce dernier nombre?*

Solution: We claim that, at each stage in the process, every number in the list has the form
$$(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1) - 1$$

where each x_i is in the original list of numbers. Also, at each stage, each of the original numbers occurs in the form above in exactly one number in the list. Clearly this is true initially since each $x_i = (x_i+1) - 1$. Suppose that, at some point in the procedure, the numbers a and b are selected from the list. Assuming that a and b have the form claimed above, we have

$$\begin{aligned} a+b+ab &= (a+1)(b+1)-1 \\ &= \{(x_1+1)\cdots(x_n+1)-1+1\}\{(y_1+1)\cdots(y_m+1)-1+1\}-1 \\ &= (x_1+1)\cdots(x_n+1)(y_1+1)\cdots(y_m+1)-1 \end{aligned}$$

so the new number has the desired form and we still have each initial number occurring in exactly one number in the list. Therefore, regardless of the order in which the pairs of the numbers are selected, the last number is

$$\begin{aligned} & (1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{99}+1\right)\left(\frac{1}{100}+1\right)-1 \\ =\ & \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}-1 \\ =\ & 101-1 \\ =\ & 100. \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'à chaque étape du processus, les nombres au tableau, $a_1, \ldots, a_m$, s'écrivent

$$a_k = (x_{k1}+1)(x_{k2}+1)\cdots(x_{kn_k}+1)-1$$

où les x_{ij} proviennent de la liste originale et chaque nombre dans la liste originale est égal à x_{ij} pour exactement une valeur de (i,j). Ceci est vrai au début parce que $x_i = (x_i+1)-1$. Si, à une étape quelconque, on applique le processus à deux nombres a et b choisis parmi une liste de nombres ayant la forme désirée, alors on a

$$\begin{aligned} a+b+ab &= (a+1)(b+1)-1 \\ &= \{(x_1+1)\cdots(x_n+1)-1+1\}\{(y_1+1)\cdots(y_m+1)-1+1\}-1 \\ &= (x_1+1)\cdots(x_n+1)(y_1+1)\cdots(y_m+1)-1 \end{aligned}$$

et la nouvelle liste a donc la forme désirée. Il suit que le dernier nombre est

$$\begin{aligned} & (1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{99}+1\right)\left(\frac{1}{100}+1\right)-1 \\ =\ & \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}-1 \\ =\ & 101-1 \\ =\ & 100. \end{aligned}$$

6. There are n^k possible k-tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ which can be constructed by taking each a_i from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. For each of these k-tuples, the minimum a_i is noted. Prove that the sum of all these minimum a_i is

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

De chacun des n^k différents k-uples $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ dont les coordonnées a_i appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on choisit la plus petite coordonnée. Montrer que la somme de ces coordonnées minimales est

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

Solution: For each $i = 1, 2, \ldots, n$, let b_i be the number of lists in which the smallest number is i. Furthermore, let c_i be the number of lists in which the smallest number is at least i. Then $b_i = c_i - c_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ and $b_n = c_n$. Now S, the sum of all the smallest numbers, is

$$\begin{aligned} S &= b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-1)b_{n-1} + nb_n \\ &= (c_1 - c_2) + 2(c_2 - c_3) + 3(c_3 - c_4) + \cdots + (n-1)(c_{n-1} - c_n) + nc_n \\ &= c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n. \end{aligned}$$

Now the list $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ has smallest number at least i if and only if $i \le a_i \le n$ for all i. Therefore, $c_i = (n-i+1)^k$ so

$$S = n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \cdots + 2^k + 1^k$$

as required.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, soit b_i le nombre de k-uples dont la plus petite coordonnée est i et soit c_i le nombre de k-uples dont la plus petite coordonnée est au moins i. Alors $b_i = c_i - c_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $b_n = c_n$. La somme S des coordonnées minimales est

$$\begin{aligned} S &= b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-1)b_{n-1} + nb_n \\ &= (c_1 - c_2) + 2(c_2 - c_3) + 3(c_3 - c_4) + \cdots + (n-1)(c_{n-1} - c_n) + nc_n \\ &= c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n. \end{aligned}$$

La coordonnée minimale du k-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ est au moins i si et seulement si $i \le a_i \le n$ pour tout i. Donc $c_i = (n-i+1)^k$ et on a

$$S = n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \cdots + 2^k + 1^k$$

tel que désiré.