

2006 Maritime Mathematics Competition Concours de Mathématiques des Maritimes 2006

Instructions: Directives :

1. Provide the information requested below.
Veillez fournir les renseignements demandés ci-dessous.
2. No calculators nor any other aids (tables, books, rulers, etc.) are allowed.
Ni les calculatrices, ni autres outils (tables, livres, règles, etc.) ne sont autorisés.
3. This competition is three hours long, to be written in one three-hour sitting on March 2, 2006.
Ce concours dure trois heures et doit être complété en une séance de trois heures le 2 mars 2006.
4. All solutions are to be written in this booklet, beginning on the page on which each question is printed.
La solution de chaque problème devrait débiter sur la page qui contient l'énoncé du problème.
5. This booklet should contain six different questions, numbered from 1 to 6, all of which have equal value. Check that you have a complete booklet.
Ce livret devrait contenir six questions différentes numérotées de 1 à 6. Elles ont toutes la même valeur. Vérifiez que vous avez un livret complet.
6. All solutions must be fully justified. A complete answer to one problem is, in general, worth more than partial solutions to several.
Toute solution doit être justifiée. Il est préférable de donner une solution complète pour un seul problème que de donner des solutions incomplètes à plusieurs problèmes.

Name/Nom: _____

Signature: _____

Age/Âge: _____ Grade/Année: _____

School/École: _____



A grant in support of this activity was received from the Canadian Mathematical Society.
La Société mathématique du Canada a donné un appui financier à cette activité.

1. At 9 o'clock, the hour and minute hands on a clock form a right angle. After 9'clock, what is the next time at which the clock hands form a right angle?

Après neuf heures, quelle est la prochaine heure à laquelle les aiguilles d'une horloge forment un angle droit?

2. For a positive number such as 3.14, 3 is called the *integral part* and 0.14 is the *fractional part*.

- (a) Find a positive number which is such that its fractional part, its integral part, and the number itself are three consecutive terms in an arithmetic sequence. (The sequence $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ is called *arithmetic* if there is a number d such that $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d$.)
- (b) Find a positive number which is such that its fractional part, its integral part, and the number itself are three consecutive terms in a geometric sequence. (The sequence $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ is called *geometric* if there is a number $r \neq 0$ such that $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \dots = r$.)

Pour un nombre positif comme 3.14, 3 s'appelle la partie entière et 0.14 la partie décimale.

- (a) Trouver un nombre positif tel que sa partie décimale, sa partie entière et le nombre lui-même sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. (Une suite $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ est dite arithmétique si pour un certain nombre d , $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d$.)
- (b) Trouver un nombre positif tel que sa partie décimale, sa partie entière et le nombre lui-même sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. (Une suite $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ est dite géométrique si pour un certain nombre $r \neq 0$, $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \dots = r$.)

3. A rectangular tank having length 60 cm, width 60 cm, and height 40 cm is filled with water to a depth of 15 cm and rests on a horizontal table. Let A , B , C , and D in cyclic order be the four bottom corners of the tank. Suppose that the edge BC is slowly raised so that the edge AD remains on the table. As water flows out, the tank is raised until the edge AB makes an angle of 60° with the table. The edge BC is then lowered until the tank once again rests on the table. At this point, what is the depth of water in the tank?

Une cuve rectangulaire de longueur 60 cm, de largeur 60 cm, et de hauteur 40 cm est remplie d'eau jusqu'à une profondeur de 15 cm et repose sur une table horizontale. Soient A , B , C , et D en ordre cyclique les quatre coins de la base de la cuve. On vide partiellement la cuve en soulevant lentement l'arête BC de sorte que la cuve pivote autour de l'arête AD . Quand l'angle que fait l'arête AB avec le plan de la table atteint 60° , on retourne la cuve à sa position originale. Quelle est maintenant la profondeur de l'eau dans la cuve?

4. Suppose that the positive integers are written in a spiral as follows.

7	8	9	10
6	1	2	11
5	4	3	12
...	14	13	

Relative to the number 1, where does the number 2006 appear? (For example, 10 appears one unit up and two units to the right of 1.)

Écrivons les entiers positifs en spirale comme suit.

7	8	9	10
6	1	2	11
5	4	3	12
...	14	13	

Où se situe le nombre 2006 relatif au nombre 1? (Par exemple, relatif à 1, le nombre 10 est situé une rangée plus haut et deux colonnes à la droite.)

5. A *square pair* is a pair $\{x, y\}$ of positive integers such that $x + y$ and xy are both perfect squares. For example, $\{5, 20\}$ is a square pair since $5 + 20 = 25$ and $5 \times 20 = 100$ are both perfect squares. Show that no square pair exists in which one of the numbers is 3.

Il se peut pour une paire $\{x, y\}$ d'entiers positifs que $x + y$ et xy soient tous les deux des carrés parfaits. Par exemple, $\{5, 20\}$ est une telle paire puisque $5 + 20 = 25$ et $5 \times 20 = 100$ sont des carrés parfaits. Montrer que le nombre 3 n'appartient à aucune telle paire.

6. Find all solutions in real numbers of the following system of equations.

$$\begin{aligned}2(x + y - 2) &= y(x - y + 2) \\x^2(y - 1) + y^2(x - 1) &= xy - 1\end{aligned}$$

Trouver toutes les valeurs réelles de x et y qui satisfont au système d'équations ci-dessous.

$$\begin{aligned}2(x + y - 2) &= y(x - y + 2) \\x^2(y - 1) + y^2(x - 1) &= xy - 1\end{aligned}$$