2003 Maritime Mathematics Competition
Concours de Mathématiques des Maritimes 2003

1. When a father distributes a number of candies among his children, each child receives 15 candies and there is one left over. If, however, two friends join the group and the candies are redistributed, then each child receives 11 candies and there are three left over. What is the total number of candies?

   Si un homme partage un certain nombre de bonbons entre ses enfants, chaque enfant en reçoit quinze et il en reste un. S'il partage le même nombre de bonbons entre ses enfants et deux de leurs amis, chaque enfant en reçoit onze et il en reste trois. De combien de bonbons s'agit-il?

   Solution:

   Let x be the number of candies and let y be the number of children (not including the two friends). Then we have

   $$x = 15y + 1 \quad \text{and} \quad x = 11(y + 2) + 3$$

   so $15y + 1 = 11(y + 2) + 3$ which yields $y = 6$. Now $x = 15(6) + 1 = 91$ so the total number of candies is 91.

   Soit x le nombre de bonbons et y le nombre d'enfants (sans compter les deux amis). On a

   $$x = 15y + 1 \quad \textit{et} \quad x = 11(y + 2) + 3,$$

   ce qui donne $15y+1 = 11(y+2)+3$, d'où $y = 6$. Le nombre de bonbons est $x = 15(6) + 1 = 91$.

2. For a positive integer n, define

   $$f(n) = \left(4(1)^2 - 1\right) \times \left(4(2)^2 - 1\right) \times \cdots \times \left(4n^2 - 1\right) .$$

   For example, $f(1) = 3$ and $f(2) = 3 \times 15 = 45$.

   Find all values of n for which $f(n)$ is a perfect square.

   Pour chaque entier strictement positif n, posons

   $$f(n) = \left(4(1)^2 - 1\right) \times \left(4(2)^2 - 1\right) \times \cdots \times \left(4n^2 - 1\right) .$$

   Par example, $f(1) = 3$ et $f(2) = 3 \times 15 = 45$.

   Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ est un carré parfait.

   Solution:

We observe that $4k^2-1=(2k)^2-1=(2k-1)(2k+1)$ so

$$\begin{aligned} f(n) &= [(2(1)-1)(2(1)+1)][(2(2)-1)(2(2)+1)]\cdots[(2n-1)(2n+1)] \\ &= [(1)(3)][(3)(5)][(5)(7)]\cdots[(2n-3)(2n-1)][(2n-1)(2n+1)] \\ &= 3^2 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1) \\ &= [(3)(5)\cdots(2n-1)]^2(2n+1)\ . \end{aligned}$$

It follows that $f(n)$ is a perfect square if and only if $2n+1$ is a perfect square.

Now if the odd integer $2n+1$ is a perfect square then it is the square of an odd integer, say $2a+1$, so $2n+1=(2a+1)^2=4a^2+4a+1$ which yields $n=2a(a+1)$. Conversely, if $n=2a(a+1)$ for some integer a, then $2n+1=(2a+1)^2$ is a perfect square. Therefore, $2n+1$ is a perfect square if and only if $n=2a(a+1)$ for some integer a so the set of values of n for which $f(n)$ is a perfect square is the set $\{2a(a+1)\mid a=1,2,3,\ldots\}$.

Puisque $4k^2-1=(2k)^2-1=(2k-1)(2k+1)$*, on a*

$$\begin{aligned} f(n) &= [(2(1)-1)(2(1)+1)][(2(2)-1)(2(2)+1)]\cdots[(2n-1)(2n+1)] \\ &= [(1)(3)][(3)(5)][(5)(7)]\cdots[(2n-3)(2n-1)][(2n-1)(2n+1)] \\ &= 3^2 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1) \\ &= [(3)(5)\cdots(2n-1)]^2(2n+1)\ . \end{aligned}$$

Pour que $f(n)$ *soit un carré parfait, il faut et il suffit que* $2n+1$ *soit un carré parfait.*

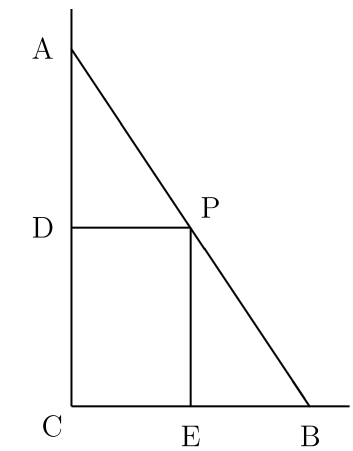
Si le nombre impair $2n+1$ *est un carré parfait, il est le carré d'un nombre impair, disons* $2a+1$*. Dans ce cas,* $2n+1=(2a+1)^2=4a^2+4a+1$*, donc* $n=2a(a+1)$*. Réciproquement, si* $n=2a(a+1)$ *pour un certain entier positif* a*, alors* $2n+1=(2a+1)^2$ *est un carré parfait. Les valeurs de* n *pour lesquelles* $f(n)$ *est un carré parfait sont donc données par* $n=2a(a+1)$*,* $a=1,2,3\ldots$*.*

3. A 10 metre ladder rests against a vertical wall. The midpoint of the ladder is twice as far from the ground as it is from the wall. At what height on the wall does the ladder reach?

   Une échelle longue de dix mètres est placée contre un mur vertical. Si le point milieu de l'échelle est deux fois plus distant du sol que du mur, à quelle hauteur l'échelle s'appuie-t-elle contre le mur?

Solution:

Let the points at which the ladder touches the wall and the ground be A and B respectively, and let C be the point at which the wall meets the ground. Let P be the midpoint of the ladder and let point D be on the wall so that PD is parallel to the ground. Finally, let E be the point on the ground such that PE is parallel to the wall.



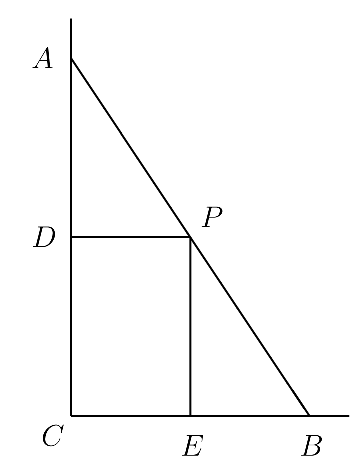
Let x and $2x$ be the lengths of DP and EP respectively. Since the ladder is 10 metres long, we have $|AP| = |BP| = 5$.

Now $\angle DAP = \angle EPB$ and $\angle DPA = \angle EBP$ so $\triangle DAP$ is congruent to $\triangle EPB$. Therefore, $|DA| = |EP| = 2x$ and $|EB| = |DP| = x$. Applying the Pythagorean Theorem to $\triangle DAP$, we obtain

$$(2x)^2 + x^2 = 5^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{5}\,.$$

Now $|DA| = 2x$ and $|CD| = |EP| = 2x$ so $|AC| = 4x = 4\sqrt{5}$. Therefore, the ladder reaches a height of $4\sqrt{5}$ metres on the wall.

Soient A et B les points où l'échelle s'appuie contre le mur et le sol, respectivement. Soit C le point où le mur touche au sol. Soient P le point milieu de l'échelle, D le point sur le mur tel que PD est parallèle au sol, et E le point au sol tel que PE est parallèle au mur.



Soit x la longueur de DP. Par hypothèse, la longueur de EP est $2x$. Puisque l'échelle a 10 mètres de long, on a $|AP| = |BP| = 5$.

On a aussi $\angle DAP = \angle EPB$ et $\angle DPA = \angle EBP$. Le triangle DAP est donc égal au triangle EPB. Il suit que $|DA| = |EP| = 2x$ et $|EB| = |DP| = x$. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle DAP donne

$$(2x)^2 + x^2 = 5^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{5}\,.$$

Puisque $|DA| = 2x$ et $|CD| = |EP| = 2x$, on a $|AC| = 4x = 4\sqrt{5}$. L'échelle s'appuie donc sur le mur à une hauteur de $4\sqrt{5}$ mètres.

4. Find a 6-digit number (in base 10) with first (that is, leftmost) digit 1 such that if the first digit is transferred to the right, then the number so obtained is three times the original number.

   Trouver un nombre à six chiffres dont le premier chiffre est 1 et qui devient trois fois plus grand si le premier chiffre est déplacé à l'autre bout pour devenir le chiffre des unités.

   Solution:

   Let $1abcde$ be the 6 digits of the original number. The value of this number is then $10^5 + x$ where x is the integer with decimal representation $abcde$. Transferring the first digit to the right gives the digits $abcde1$ and the value of this number is $10x + 1$. This new number is three times the original number so

$$10x + 1 = 3(10^5 + x) \quad \Longrightarrow \quad 7x = 3 \times 10^5 - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 42857.$$

   Therefore, 142857 is the (unique) 6-digit number with the desired property.

   Soit $1abcde$ le nombre en question. On a $1abcde = 10^5 + x$ où $x = abcde$. Lorsque le premier chiffre est déplacé à l'autre bout, on obtient $abcde1 = 10x + 1$. Ce nouveau nombre est trois fois plus grand que le premier, ce qui donne

$$10x + 1 = 3(10^5 + x) \quad \Longrightarrow \quad 7x = 3 \times 10^5 - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 42857.$$

   Le nombre cherché est donc 142857.

5. Evaluate

$$\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} \; + \; \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}\,.$$

   Évaluer

$$\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} \; + \; \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}\,.$$

Solution:

Let $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$ and $y = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ and let $s = x+y$ be the required sum. We have

$$s^3 = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xys\ .$$

Now $x^3 = 5+2\sqrt{13}$ and $y^3 = 5-2\sqrt{13}$ and

$$xy = \sqrt[3]{(5+2\sqrt{13})(5-2\sqrt{13})} = \sqrt[3]{25-4(13)} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

so

$$s^3 = 5+2\sqrt{13}+5-2\sqrt{13}+3(-3)s \quad\Longrightarrow\quad s^3+9s-10=0\ .$$

By inspection, $s=1$ is a root of this equation so $s-1$ divides $s^3+9s-10$. By long division, we obtain s^2+s+10 as the other factor so we have

$$(s-1)(s^2+s+10)=0\ .$$

Now $s^2+s+10=0$ has no real roots so the only solution to the above equation is $s=1$. Therefore,

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = 1\ .$$

Soit $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$ *et* $y = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. *Posons* $s = x+y$. *On a*

$$s^3 = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xys\ .$$

Puisque $x^3 = 5+2\sqrt{13}$, $y^3 = 5-2\sqrt{13}$, *et*

$$xy = \sqrt[3]{(5+2\sqrt{13})(5-2\sqrt{13})} = \sqrt[3]{25-4(13)} = \sqrt[3]{-27} = -3,$$

on obtient

$$s^3 = 5+2\sqrt{13}+5-2\sqrt{13}+3(-3)s \quad\Longrightarrow\quad s^3+9s-10=0\ .$$

On trouve facilement la racine $s=1$, *donc* $s-1$ *divise* $s^3+9s-10$. *La division donne* s^2+s+10 *pour l'autre facteur. L'équation à résoudre s'écrit maintenant*

$$(s-1)(s^2+s+10)=0\ .$$

Le polynôme $s^2+s+10=0$ *n'a pas de racines réelles. La seule solution est donc* $s=1$ *et on a donc*

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = 1\ .$$

6. Find all pairs of positive integers (x, y) such that

$$x^2 - 11\,y! = 2003\ .$$

(Note that $1! = 1, 2! = (1)(2) = 2, 3! = (1)(2)(3) = 6$, etc.)

Trouver toutes les paires d'entiers positifs (x, y) *telles que*

$$x^2 - 11\,y! = 2003\ .$$

(Par définition, $1! = 1$, $2\,! = 1 \cdot 2 = 2$, $3\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, *etc.)*

Solution:

Notice that, if x is even, then $x = 2k$ for some integer k so $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$ is a multiple of 4. On the other hand, if x is odd, then $x = 2k + 1$ for some integer k so $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ is one more than a multiple of 4. To summarize, x^2 is of the form $4m$ or $4m + 1$ for some integer m.

Moreover, for $y \geq 4$, $y!$ contains 4 as a factor so $11y!$ is a multiple of 4.

Therefore, for $y \geq 4$, the left hand side of the equation is either a multiple of 4 or one more than a multiple of 4. However, the right hand side, namely 2003, is three more than a multiple of 4. The equation, then, can have no solution if $y \geq 4$.

The only possible solutions have $y = 1, 2$, or 3 and we now check each case.

For $y = 1$, we have $x^2 - 11(1!) = 2003$ so $x^2 = 2014$ which has no solution in positive integers since 2014 is not a perfect square.

For $y = 2$, we have $x^2 - 11(2!) = 2003$ so $x^2 = 2025$ which yields $x = 45$.

Finally, for $y = 3$, we have $x^2 - 11(3!) = 2003$ so $x^2 = 2069$ which has no positive integer solution.

Therefore, the equation has the unique solution $(x, y) = (45, 2)$.

Si x est pair, disons $x = 2k$, alors $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$ est un multiple of 4. D'autre part, si x est impair, disons $x = 2k + 1$, alors $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ est un multiple de quatre plus un. On conclut que pour un certain entier m, $x^2 = 4m$ ou $x^2 = 4m + 1$.

De plus, lorsque $y \geq 4$, $y!$ contient le facteur 4. Le membre de gauche de l'équation, c.-à-d. $x^2 - 11\,y!$, est donc soit un multiple de quatre, soit un multiple de quatre plus un. Par contre, le membre de droite, c.-à-d. 2003, est un multiple de quatre plus trois. L'équation n'a donc pas de solutions quand $y \geq 4$.

On vérifie un par un les cas $y = 1, 2, 3$.

Si $y = 1$, *on a* $x^2 - 11(1!) = 2003$, *donc* $x^2 = 2014$. *On vérifie aisément que 2014 n'est pas un carré parfait. Il n'a donc pas de solutions lorsque* $y = 1$.

Si $y = 2$, *on a* $x^2 - 11(2!) = 2003$, *donc* $x^2 = 2025$. *Cette fois on trouve* $x = 45$.

Enfin, si $y = 3$, *on a* $x^2 - 11(3!) = 2003$, *donc* $x^2 = 2069$. *On vérifie que 2069 n'est pas un carré parfait. Il n'a donc pas de solutions lorsque* $y = 3$.

L'équation possède donc la solution unique $(x, y) = (45, 2)$.