2001 Maritime Mathematics Competition (Solutions)
Concours de mathématiques des Maritimes 2001 (solutions)

1. Alice and Bob were comparing their stacks of pennies. Alice said "If you gave me a certain number of pennies from your stack, then I'd have six times as many as you, but if I gave you that number, you'd have one-third as many as me." What is the smallest number of pennies that Alice could have had?

   Alice et Bob comparent leurs piles de sous. Alice affirme, ≪ Si tu me donnais un certain nombre de tes sous, j'en aurais six fois plus que toi; si je te donnais ce même nombre de mes sous, j'en aurais trois fois plus que toi. ≫ Quel est le plus petit nombre de sous que peut contenir la pile d'Alice?

   Solution:

   Let a and b be, respectively, the number of pennies that Alice and Bob had, and let x be the certain number of pennies. From the given information, we obtain the following two equations.

$$\begin{aligned} a + x &= 6(b - x) \\ a - x &= 3(b + x) \end{aligned}$$

   From the first equation, $a = 6b - 7x$, and, from the second equation, $a = 3b + 4x$. Therefore,

$$6b - 7x = 3b + 4x \quad \text{so} \quad b = \frac{11}{3}x\ .$$

   Since a, b, and x are required to be positive integers, the smallest possible value for x is 3. Then $b = 11$ and $a = 6(11) - 7(3) = 45$.

   Therefore, 45 is the smallest number of pennies that Alice could have had.

   Soient a le nombre de sous que possède Alice, et b le nombre que possède Bob. Soit x le certain nombre dont il est question dans l'énoncé. On a

$$\begin{aligned} a + x &= 6(b - x) \\ a - x &= 3(b + x) \end{aligned}$$

   De la première équation, on obtient $a = 6b - 7x$, et de la deuxième, $a = 3b + 4x$. On en déduit

$$6b - 7x = 3b + 4x \quad \textit{et donc} \quad b = \frac{11}{3}x\ .$$

Puisque a, b, et x sont des entiers positifs, la valeur minimale de x est 3. D'où $b = 11$ et $a = 6(11) - 7(3) = 45$.

Le plus petit nombre de sous que peut contenir la pile d'Alice est donc de 45.

2. The infinite sequence

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 1\ 6\ 1\ 7\ 1\ 8\ 1\ 9\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3 \ldots$$

is obtained by writing the positive integers in order. What is the 2001st digit in this sequence?

En écrivant l'un après l'autre les chiffres de chaque entier positif, on obtient la suite infinie

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 1\ 6\ 1\ 7\ 1\ 8\ 1\ 9\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3 \ldots$$

Quel est le 2001$^{\text{ième}}$ terme de la suite?

Solution:

The digits $1, 2, \ldots, 9$ occupy 9 positions, and the digits in the numbers $10, 11, \ldots, 99$ occupy $2 \times 90 = 180$ positions. Further, the digits in the numbers $100, 101, \ldots, 199$ occupy $100 \times 3 = 300$ positions. Similarly, 300 positions are required for the numbers 200 to 299, et cetera.

Therefore, the digits in the numbers up to and including 699 occupy the first

$$9 + 180 + (6 \times 300) = 1989$$

positions. A further 12 positions are required to write 700701702703 so the 2001st digit is the "3" in 703.

Les chiffres $1, 2, \ldots, 9$ occupent 9 positions, et les chiffres des nombres $10, 11, \ldots, 99$ occupent $2 \times 90 = 180$ positions. De plus, les chiffres des nombres $100, 101, \ldots, 199$ occupent $100 \times 3 = 300$ positions. De même pour les chiffres des nombres de 200 à 299, etc.

Donc, les chiffres des nombres de 1 à 699 occupent les

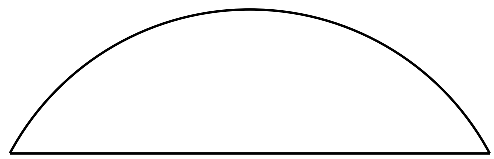
$$9 + 180 + (6 \times 300) = 1989$$

premières positions.

Après cela la suite se continue comme suit: 700701702703... et on déduit facilement que le chiffre qui occupe la 2001$^{\text{ième}}$ position est le 3 dans 703.

3. The maximum height of a railway tunnel is 5 metres and the width of the tunnel is $10\sqrt{3}$ metres. The outline of the tunnel is in the form of a segment of a circle as shown below. Determine the area of a cross-section of the tunnel.

La section d'un tunnel de chemin de fer est la portion de cercle indiquée dans la figure ci-dessous. La hauteur du tunnel est de 5 mètres et sa largeur est de $10\sqrt{3}$ *mètres. Quelle est l'aire de la section?*



Solution:

Consider a circle with centre O and let AB be a chord (which is not a diameter) of the circle. Let P be the point on the circumference of the circle such that OP is the perpendicular bisector of AB. Finally, let X be the point of intersection of AB and OP.

Suppose that $|XP| = 5$ and $|AX| = |BX| = 5\sqrt{3}$. The chord AB divides the circle into two sections; the problem is to determine the area of the smaller section.

Let r be the radius of the circle so $|OB| = r$ and $|OX| = r-5$. Applying the Pythagorean Theorem to $\triangle OXB$, we obtain

$$(r-5)^2 + (5\sqrt{3})^2 = r^2$$

from which $r = 10$.

Therefore, the lengths of the sides of $\triangle OXB$ are 5, $5\sqrt{3}$, and 10, that is, in the ratio $1 : \sqrt{3} : 2$. Therefore, $\angle XOB = 60^\circ$ so the area of the sector OAB of the circle is

$$\frac{1}{3} \times \text{ area of the entire circle} = \frac{1}{3}\pi(10)^2 = \frac{100\pi}{3}.$$

The area of $\triangle AOB$ is

$$\frac{1}{2} \times |AB| \times |OX| = \frac{1}{2}(10\sqrt{3})(5) = 25\sqrt{3}$$

so the required area is

$$\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3} \quad \text{square units.}$$

Considérons un cercle C de centre O. Soit AB une corde de C qui n'en n'est pas un diamètre. Soit X le point milieu de AB, et soit P le point de C tel que OP coupe AB en X.

Supposons que $|XP| = 5$ et $|AX| = |BX| = 5\sqrt{3}$. La corde AB divise le cercle en deux régions. Il nous faut l'aire de la plus petite.

Soit r le rayon du cercle, de sorte que $|OB| = r$ and $|OX| = r - 5$. Du théorème de Pythagore appliqué au triangle OXB, on obtient

$$(r-5)^2 + (5\sqrt{3})^2 = r^2$$

d'où $r = 10$.

Les longueurs des côtés du triangle OXB sont donc 5, $5\sqrt{3}$, et 10, ce qui donne le rapport $1 : \sqrt{3} : 2$. Il suit que $\angle XOB = 60°$ et l'aire du secteur OAB est donc

$$\frac{1}{3} \times \text{ aire du cercle} = \frac{1}{3}\pi(10)^2 = \frac{100\pi}{3}.$$

L'aire du triangle AOB est

$$\frac{1}{2} \times |AB| \times |OX| = \frac{1}{2}(10\sqrt{3})(5) = 25\sqrt{3}.$$

L'aire demandée est donc

$$\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3} \quad \textit{unités carrées.}$$

4. Which of the following numbers is greater?

$$A = \frac{2.0000004}{(1.0000004)^2 + 2.0000004} \quad \text{or} \quad B = \frac{2.0000002}{(1.0000002)^2 + 2.0000002}$$

Lequel des nombres suivant est le plus grand?

$$A = \frac{2.0000004}{(1.0000004)^2 + 2.0000004} \quad \textit{ou} \quad B = \frac{2.0000002}{(1.0000002)^2 + 2.0000002}$$

Solution:

Consider the numbers

$$a = \frac{2+2x}{(1+2x)^2 + (2+2x)} = \frac{2+2x}{3+6x+4x^2}$$

and

$$b = \frac{2+x}{(1+x)^2 + (2+x)} = \frac{2+x}{3+3x+x^2}$$

where $x > 0$. Now $a < b$ is equivalent to

$$(2+2x)(3+3x+x^2) < (2+x)(3+6x+4x^2) \ .$$

Expanding both sides, we obtain

$$6 + 12x + 8x^2 + 2x^3 < 6 + 15x + 14x^2 + 4x^3$$

that is, $2x^3 + 6x^2 + 3x > 0$. This inequality is true for any $x > 0$ so, for all such x, $a < b$. Setting $x = 0.0000002$, we have $a = A$ and $b = B$ so $A < B$, that is, B is greater.

Considérons les nombres

$$a = \frac{2+2x}{(1+2x)^2 + (2+2x)} = \frac{2+2x}{3+6x+4x^2}$$

et

$$b = \frac{2+x}{(1+x)^2 + (2+x)} = \frac{2+x}{3+3x+x^2}$$

où $x > 0$. *Notons que* $a < b$ *équivaut à*

$$(2+2x)(3+3x+x^2) < (2+x)(3+6x+4x^2) \ .$$

En développant on obtient

$$6 + 12x + 8x^2 + 2x^3 < 6 + 15x + 14x^2 + 4x^3$$

ce qui se réduit à $2x^3 + 6x^2 + 3x > 0$. *Puisque* $x > 0$ *est arbitraire, on a* $a < b$ *pour toute valeur de* $x > 0$. *En prenant* $x = 0.0000002$, *on obtient* $a = A$ *et* $b = B$. *Donc,* B *est le plus grand nombre.*

5. Alice and Bob play the following game with a pile of 2001 beans. A move consists of removing one, two, or three beans from the pile. The players move alternately, beginning with Alice. The person who takes the last bean in the pile is the winner. Which player has a winning strategy for this game and what is that strategy?

   Alice et Bob jouent au jeu suivant avec une pile de 2001 fèves. À tour de rôle, chaque joueur enlève un, deux ou trois fèves de la pile. Alice joue en premier. Le joueur qui enlève la dernière fève gagne. Quel joueur a une stratégie gagnante, et quelle est cette stratégie?

   Solution:

   Alice has the following winning strategy. On her first move, she takes one bean. On subsequent moves, Alice removes $4 - x$ beans where x is the number of beans removed by Bob on the preceeding turn.

We now prove that the above strategy guarantees a win for Alice. After Alice's first move the pile contains 2000 beans. Moreover, after every pair of moves, a move by Bob followed by a move by Alice, the pile decreases by exactly 4 beans. Therefore, after every move by Alice the number of beans in the pile is a multiple of 4. Eventually, after a move by Alice, there will be 4 beans left in the pile. After Bob removes one, two, or three beans, Alice takes the remainder and wins the game.

Alice possède la stratégie gagnante qui suit. À son premier tour, elle enlève une seule fève. À chacun de ses tours subséquents, elle enlève $4-x$ *fèves où* x *est le nombre de fèves enlevés par Bob au tour précédent.*

Voici pourquoi cette stratégie est gagnante. Après le premier tour d'Alice, la pile contient 2000 fèves. Ensuite, Bob joue, Alice joue et la pile diminue de quatre fèves exactement. Il en est ainsi après chaque tour d'Alice (sauf le premier): la pile contient quatre fèves de moins qu'après son tour précédent. Éventuellement, après un tour d'Alice il reste quatre fèves dans la pile. Bob en enlève un, deux ou trois. Alice enlève tout ce qui reste et gagne le jeu.

6. Show that, regardless of what integers are substituted for x and y, the expression

$$x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5$$

is never equal to 77.

Montrer que, peu importe les entiers que l'on substitue à x *et* y*, l'expression*

$$x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5$$

ne vaut jamais 77.

Solution:

The given expression may be factored as follows.

$$\begin{aligned}
N &= x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5 \\
&= x^4(x-y) - 13x^2y^2(x-y) + 36y^4(x-y) \\
&= (x-y)(x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4) \\
&= (x-y)(x^2-4y^2)(x^2-9y^2) \\
&= (x-y)(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)
\end{aligned}$$

If $y = 0$ then $N = x^5$ which is not equal to 77 for any integer x. On the other hand, if $y \neq 0$ then the five factors of N are all distinct. However, any expression of 77 as a product of distinct integers contains at most four factors, specifically as $(1)(-1)(7)(-11)$ or $(1)(-1)(-7)(11)$. Therefore, for any choice of x and y, N is never equal to 77.

La mise en facteurs de cette expression donne

$$\begin{aligned} N &= x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5 \\ &= x^4(x-y) - 13x^2y^2(x-y) + 36y^4(x-y) \\ &= (x-y)(x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4) \\ &= (x-y)(x^2-4y^2)(x^2-9y^2) \\ &= (x-y)(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y) \end{aligned}$$

Si $y = 0$ *alors* $N = x^5$ *qui diffère de 77 pour toute valeur entière de* x. *Si* $y \neq 0$ *alors les cinq facteurs de* N *sont distincts. Cependant, les façons d'exprimer 77 comme le produit d'entiers distinctes donnent au plus quatres facteurs* ($(1)(-1)(7)(-11)$ *et* $(1)(-1)(-7)(11)$). *Donc,* N *ne vaut jamais 77.*