Concours de mathématiques 2000 du CIPAS

Durée : 3 heures

Les membres d'une même équipe peuvent travailler ensembles mais pas avec ceux des autres équipes. L'utilisation d'une calculatrice ou de notes est interdite.

Prière de répondre à chaque question sur une ou des pages distinctes. Ne pas faire de renvoi à d'autres réponses, car chaque réponse sera notée séparément. Inscrivez sur chaque page vos noms, le numéro de votre équipe et le numéro de la question. Montrer bien toutes les étapes de votre travail.

Peu de points seront accordés pour les réponses fragmentaires ou incomplètes.

Ce questionnaire de deux pages contient huit questions de valeur égale.

1. N personnes, que nous désignerons 1,...,N; rendent visite à un mathématicien pour jouer à un jeu. Chaque joueur reçoit une pièce de monnaie, de telle façon que le joueur "i" reçoit la pièce de monnaie "i". De plus, lorsqu'elle est lancée, la pièce "i" tombe côté "pile" avec une probabilité de p_i, $p_i > 0$. Chacun leur tour, les joueurs lancent leur pièce (par ordre 1,...,N), et le gagnant est le premier dont la pièce tombe côté "pile". Il faut savoir cependant que le mathématicien a, sous l'hypothèse d'indépendance, choisi les valeurs des p_i de façon à s'assurer que tous les joueurs aient la même probabilité de gagner (cette probabilité étant évidemment $\frac{1}{N}$).

   (a) Si $p_1 = 0.10$ et $N = 5$, déterminer des valeurs de p_2, p_3, p_4 et p_5 pour que les 5 joueurs aient la même probabilité de gagner.

   (b) Montrer que la condition $p_1 \leq \frac{1}{N}$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un moyen de s'assurer que tous les joueurs aient la même probabilité de gagner.

2. Soit $S = \{1, 2, 3, ..., 3n\}$. Nous définissons une partition de triplets sommables comme étant une collection de n triplets disjoints de S, $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}, i = 1, \ldots, n$, où l'union $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ est S, et, pour chaque triplet A_i, l'un des éléments s'exprime comme la somme des deux autres. À titre d'exemple: $\{\{1, 5, 6\}, \{2, 9, 11\}, \{3, 7, 10\}, \{4, 8, 12\}\}$ est une partition de triplets sommables de $\{1, 2, 3, ..., 12\}$.

   (a) Trouver une partition de triplets sommables de $\{1, 2, 3, ..., 15\}$.

   (b) Démontrer qu'il n'existe pas de partition de triplets sommables pour le cas où $n = 1999$.

3. Deux enfants polis, mais vindicatifs, participent au jeu suivant. Un bol contient N bonbons, la quantité N étant connue des deux participants. Chacun leur tour, les enfants prennent autant de bonbons qu'ils le désirent, mais ils sont contraints à ne jamais prendre plus de la moitié des bonbons restants. (á chaque tour, on doit prendre au moins un bonbon, si possible.) Le gagnant est, non pas celui qui prend le plus de bonbons, mais plutôt celui qui réussit à être le dernier à en prendre.

   Ainsi, s'il y a trois bonbons, le premier joueur ne peut en prendre qu'un seul, puisque deux représenterait plus de la moitié. Le second joueur peut alors prendre un des bonbons qui restent et réussit ainsi à gagner, car le premier joueur ne peut pas prendre le dernier bonbon.

   (a) Montrer que si le jeu débute avec 2000 bonbons, le premier joueur peut s'assurer de gagner.

   (b) Montrer que si le jeu débute avec $999 \cdots 999$ (2000 neuf) bonbons, le premier joueur peut s'assurer de gagner.

4. En supposant que a, b, c, d, e, f soient des nombres entiers de valeurs absolues inférieures ou égales à 7 et que les paraboles

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax + b \\ y &= x^2 + cx + d \\ y &= x^2 + ex + f \end{aligned}$$

   contiennent une région R du plan, montrer que l'aire de R est

   (a) un nombre rationnel,

   (b) ayant un dénominateur inférieur à 2000.

5. La progression géométrique de longueur trois (2,10,50) possède la propriété suivante : $(2 + 10 + 50) * (2 - 10 + 50) = 2^2 + 10^2 + 50^2$.

   (a) Démontrer qu'une telle propriété est vérifiée pour d'autres progressions géométriques de longueur trois.

   (b) Démontrer qu'une telle propriété est vérifiée pour d'autres progressions géométriques de longueur n.

6. Résoudre pour $x, y > 0$ réels: $2xy \ln(x/y) < x^2 - y^2$.

7. En n'ayant recours ni à une calculatrice, ni à de longs calculs, montrer que $3^{2701} \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 2701)$. REMARQUE: $2701 = 37 \times 73$.

8. Un triangle isocèle a pour sommet A et pour base BC. D'un point D du segment AB, nous traçons une perpendiculaire qui croise le prolongement de BC au point E de telle façon que $AD = CE$. Si DE croise AC au point F, montrer que l'aire du triangle ADF correspond au double de l'aire du triangle CFE.